CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNÉE 1988

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 7)

On veillera à justifier tous les résultats.

1 - Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{C}$. Cependant, les intégrales introduites ne concernent que des fonctions de variable réelle.

2 - n désigne partout un élément de $\mathbb{N}^*$. k et s désignent également des entiers.

3 - Toutes les fois que ce sera utile, on identifiera, par abus de langage, le polynôme P, élément de $\mathbb{R}[X]$, et la fonction polynôme associée $x \longmapsto P(x)$.

4 - La question 3°) de la partie I est indépendante des deux premières questions.
La partie II n'exige pas la résolution de la partie I à condition d'admettre les résultats de I - 3°).

PARTIE I

1°) h étant un réel tel que $\sin\frac{h}{2} \neq 0$, donner des expressions simples, faisant intervenir $\sin\frac{h}{2}$, $\sin\frac{nh}{2}$, $\cos(n+1)\frac{h}{2}$, $\sin(n+1)\frac{h}{2}$, de :

$$S_n(h) = \sum_{k=1}^{n} \cos kh \qquad \Sigma_n(h) = \sum_{k=1}^{n} \sin kh$$

2°) On pose, en supposant toujours $\sin\frac{h}{2} \neq 0$,

$$\sigma_n(h) = \sum_{k=1}^{n} k \sin kh$$

Montrer à l'aide de la question 1°) que :

$$\sigma_n(h) = \frac{\cos\frac{h}{2}\sin(2n+1)\frac{h}{2} - (2n+1)\cos(2n+1)\frac{h}{2}\sin\frac{h}{2}}{4\sin^2\frac{h}{2}}$$

3°) On pose : $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} X^k$

Montrer que le seul zéro réel de P_n est - 1 . Vérifier que l'ensemble des zéros non réels de P_n dans $\mathbb{C}$ est $\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k, \bar{x}_k)$, où : $x_k = e^{\frac{\pi i k}{n+1}}$

PARTIE II

On pose, x étant un réel tel que $x \neq -1$, P_n le polynôme défini en I - 3°), et s un entier tel que $0 \leqslant s \leqslant 2n-1$,

$$f_{n,s}(x) = \frac{x^s}{P_n(x)}$$

$$I_{n,s} = \int_0^{+\infty} f_{n,s}(x)\,dx$$

1°) Justifier l'existence de $I_{n,s}$.

2°) Calculer $I_{1,0}$ et $I_{1,1}$ et vérifier que les résultats s'expriment simplement à l'aide de π.

3°) Montrer que :

$$I_{n,s} = I_{n,2n-1-s}$$

4°) Montrer que $I_{n,0}$ admet, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, une limite que l'on calculera. On suggère pour cela de poser :

$$\int_0^1 f_{n,0}(x)\,dx = J_{n,0},$$

$$\int_1^{+\infty} f_{n,0}(x)\,dx = K_{n,0},$$

d'étudier $\lim_{n\to+\infty} K_{n,0}$, puis de considérer l'intégrale $\left[J_{n,0} - \int_0^1 (1-x)\,dx\right]$

5°) s est ici un entier positif ou nul, fixé ; n est un entier tel que $2n-1 \geqslant s$.
Etudier de même l'existence éventuelle de $\lim_{n\to+\infty} I_{n,s}$ et calculer, s'il y a lieu, cette limite en fonction de s.

T.S.V.P.

PARTIE III

Les notations sont celles des parties I et II, et on suppose de plus que $s = 0$. L'objet de cette partie est le calcul explicite de $I_{n,0}$ en fonction de n .

1°) Montrer que, pour tout x réel tel que $x \neq -1$,

$$(2n+2)\ f_{n,0}(x) = \frac{2}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k(x_k-1)}{x-x_k} + \frac{\bar{x}_k(\bar{x}_k-1)}{x-\bar{x}_k} \right]$$

2°) En déduire l'existence de réels a_k et b_k tels que, toujours si $x \neq -1$:

$$(2n+2)\ f_{n,0}(x) = \frac{2}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k\,(2x-2\cos\frac{\pi k}{n+1}) + b_k}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n+1} + 1}$$

Donner de a_k et de b_k des expressions trigonométriques en fonction de n et de k débarrassées du symbole i des nombres complexes. On devra rechercher dans l'expression de b_k la mise en facteur de $\sin\frac{\pi k}{n+1}$.

3°) Avec les notations de la question précédente, quelle est la valeur de $\sum_{k=1}^{n} a_k$?

4°) Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n+1} + 1} = \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n+1}} \left(\pi - \frac{\pi k}{n+1}\right)$$

5°) Déduire de la question précédente une expression de $(n+1)\ I_{n,0}$ comportant des signes de sommation "Σ" .

6°) Calculer, en employant le III - 5°) ainsi que le I - 1°) et 2°) une expression simple de $I_{n,0}$ en fonction de n . On constatera que $I_{n,0}$ s'exprime à l'aide de $\frac{\pi}{n+1}$ et de $\sin\frac{\pi}{n+1}$.

7°) A l'aide du résultat précédent, retrouver $\lim_{n\to+\infty} I_{n,0}$.

PARTIE IV

Les notations sont toujours celles des parties I et II, mais s est un entier arbitraire tel que $0 \leqslant s \leqslant 2n-1$. L'objet de cette partie, dont toute la méthode s'inspire de la partie III, est le calcul explicite de $I_{n,s}$ en fonction de n et de s .

1°) Montrer que, pour tout x réel tel que $x \neq -1$,

$$(2n+2)\ f_{n,s} = \frac{2(-1)^s}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k^{s+1}(x_k-1)}{x-x_k} + \frac{\bar{x}_k^{s+1}(\bar{x}_k-1)}{x-\bar{x}_k} \right]$$

2°) En déduire l'existence de réels c_k et d_k tels que, toujours si $x \neq -1$:

$$(2n+2)\ f_{n,s}(x) = \frac{2(-1)^s}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k\,(2x-2\cos\frac{\pi k}{n+1}) + d_k}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n+1} + 1}$$

Donner les expressions trigonométriques de c_k et d_k en fonction de n, s et k, en recherchant, dans l'expression de d_k, la mise en facteur de $\sin\frac{\pi k}{n+1}$.

3°) Déduire de ce qui précède une expression de $(n+1)\ I_{n,s}$ comportant des signes de sommation "Σ" .

4°) Calculer une expression simple de $I_{n,s}$. Cette expression fera intervenir

$$\frac{\pi}{2(n+1)}\ ,\ \sin\frac{\pi}{2(n+1)}\ ,\ \sin\frac{(s+1)\pi}{2(n+1)} \text{ et } \sin\frac{(s+2)\pi}{2(n+1)}$$

5°) A l'aide du résultat précédent, retrouver, s étant fixé, $\lim_{n\to+\infty} I_{n,s}$ qui a été calculée en II - 5°) .

Vérifier également les résultats des questions II - 2°) et II - 3°).

—==oOOo==—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail